流体とまさつの話

2014.5.1.

内容

☆流体とまさつの話

★ベルヌーイの式

まさつがなければ、たいていの場合流体の流速 u、質量密度ρ、圧力 P、高さ h について、流れに沿ってベルヌーイ Bernoulli の式が成立する（エネルギーの保存）:

$$P + \rho u^2/2 + \rho g h = \mathrm{const}$$

この式の第 1 項 P を静圧、第 2 項$\rho u^2/2$ を動圧と呼ぶこともある。内部エネルギーを考慮する場合には、最初の項を体積当たりのエンタルピーに置き換えることになる。実用的な用途では、しばしばベルヌーイの式は

$$H_0 = \frac{P}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} + h = \mathrm{const}$$

のように書かれる。各項は高さの次元を持つ「水頭 head」として扱われ、第 1 項は圧力ヘッド、第 2 項は速度ヘッド、第 3 項は位置ヘッド、その総和 H_0 は総ヘッドと呼ばれる。また粘性などまさつの影響で失われるエネルギーを「損失ヘッド」と呼び、速度ヘッドに損失係数ζ をかけた形で表すことが多い（つまり下流側での圧力の低下は速度の 2 乗に比例すると見なせることが多い)。

$$H_0 = \frac{P}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} + h + \zeta\frac{u^2}{2g}$$

空気の密度はおおむね 1.2 kg m^{-3} なので静止状態から 0.5 m/s の風速を得るには 0.15 Pa の圧力差（水柱にして 0.015 mm）でよい。また流速 1 m/s で水が流れるパイプの断面積を絞って 1/10 にすると流速は 10 倍になって圧力は約 0.5 atm 低下することになり、さらに絞っていけば負圧になり真空状態が生まれる。実験室で用いられる水流アスピレーター（水流ポンプ）はこのことを利用した減圧装置である。

★流体の粘性と壁面での挙動

水や空気などの流体には、単位面積当たり流速の位置による変化の度合い（速度勾配あるいはせん断速度）に比例したまさつ力が働き（粘性に対するニュートンの法則)、その比例係数η を粘度と呼ぶ（viscosity。業界によっては粘性率あるいは粘性係数と呼び、記号にμを

使うことも多い)。

$F_{xy} = \eta\, \mathrm{d}u_x/\mathrm{d}y$

粘度は(圧力)×(時間)の次元をもち、水の粘度はおよそ 1 mPa s、空気の粘度はおよそ 0.02 mPa s 程度である *。机の上に 20 cm 四方程度のプラスチックの下敷きを置き、机との間に厚さ 0.1 mm 程度の空気の層があるとして、これを 1 m/s の速度で動かす時のまさつ力は、せいぜい 0.01 N、1 円玉程度の重さでしかない。さらに積極的に空気を送り込んで空気層の厚みを増せば、まさつはさらに小さくなり、エアホッケーのようにほとんどまさつを感じない状況が実現できる。

典型的な流体の粘度と動粘度（特記する以外 25°C）

	粘度/mPa s	動粘度/mm^2 s^{-1}
水	0.891	0.891
メタノール	0.555	0.705
エタノール	1.078	1.373
ヘキサン	0.299	0.456
シクロヘキサン	0.898	1.160
ベンゼン	0.603	0.690
水銀	1.490	0.110
グリセリン	945	748
空気(300 K)	0.0186	16.0
空気(400 K)	0.0233	26.7
水蒸気(400 K)	0.0133	24.3

日本機械学会、「流体の熱物性値表」、日本機械学会 1983.

固体と流体の境界面では、流体は固体表面に固着していると考えてよい。実際に出会う多くの流れでは、流体は器壁との境界面近傍のごく狭い領域（境界層）で粘性の影響を受けて流速が急激に変化し、そこを離れると粘度の影響をほとんど受けない流れ（主流）になると見なせることが多い。したがって固体と流体の境界面近傍の振る舞いがまさつに大きな影響を与え、ごく少量の高分子化合物の添加が劇的な流体のまさつ（乱流抵抗）の減少をもたらすトムズ Toms 効果などはその例である。

★層流と乱流

流れにはほぼ均質な流れ（層流 laminar flow）と大きな擾乱を伴うもの（乱流 turbulent flow）とがある。乱流中では無数の渦が発生消滅を繰り返していると考えてよく、流れはかき混ぜられることで全体としての流れの速度は均質化されることになる。有害な蒸気・気体を排気する際、乱流状態になると新鮮な空気との置換ではなく混合が進む結果、排気の効率は一般に落ちる。したがってドラフトであまりに排気風速を上げるのは望ましくなく、開口部付近での風速を 0.5 m/s 程度に抑えるのが一般である。

粘性の効果が大きければ流れの中の乱れは終息して層流になる。粘性の効果と、運動の慣性の効果のせめぎ合いの中で、層流になるか乱流になるかが決まると考えられ、それを特徴づける量としてレイノルズ数 Re がある。

$Re = \rho u L/\eta = uL/\nu$

ここで L は系を特徴づける長さで、たとえば水道で言えば水道管の直径でも半径でもよいし、魚で言えば魚の体長でよい。また ν は流体の粘度を密度で割ったもの（$\nu = \eta/\rho$）で動粘度 kinematic viscosity と呼ばれる量である。動粘度は(面積)/(時間)の次元をもつ †。

* 今も CGS 系のポアズ P という単位が用いられることがある（計量法で許された法定単位でもある)。1 P = 0.1 Pa s であり、水の粘度は約 1 cP ということになる。
† CGS 系の単位としてストークス St も用いられる（法定単位でもある)。1 St = 1 cm^2 s^{-1}。

レイノルズ数が大きいと乱流に、小さいと層流になると考えてよく、粘度や大きさのちがう系を扱っていても、レイノルズ数が同じなら同じような流れが実現すると期待できる。たとえばゴム管中を 1 m/s の流速で 1 気圧の空気が流れている状態は、同じゴム管中を水が 6 cm/s の流速で流れているのと同等で、通常の液体と比べると空気はかなり粘い流体とし振る舞う*。あるいは人間が 0.5 m/s 程度で泳いでいる時の流れの状態は、ゲンゴロウのような虫にしてみれば 50 m/s 程度の高速で泳ぐ状態に相当し、分子レベルで考えれば超光速の運動ということになる。

★パイプの中の流れ

チューブやパイプの中の流れは、水道や冷却水、排気ダクト等に関わってしばしば出会うところである。パイプの内径を d としてレイノルズ数 ud/νを定めると、およそ 3000 程度以上になると乱流的なふるまいを示すようになることが知られている。水の場合、内径が 10 mm 程度のパイプではおよそ 0.3 m/s 程度、1.5 L/min 程度の流量を超えると乱流的な挙動を示すことになる。

粘性の効果が大きい時、半径 a 長さ L の円筒形のパイプ中の流体の流量 Q は、圧力差をΔPとすると、ハーゲン-ポアゾイユ Hagen-Poiseuille の式で表される：

$$Q = (\pi a^4/8\eta)(\Delta P/L)$$

粘性の効果が大きい時には、流速 $u = Q/\pi a^2$ は圧力差に比例し、パイプの直径の２乗に比例して大きくなる。パイプの断面が円形でない場合には、しばしば断面積 S と流体と接する周囲の長さ L を用いて定義される水力直径 hydraulic diameter $D_H = 4S/L$ を用いて、あたかも内径 D_H の円形のチューブであるかのように取り扱われる†。

圧力差を増して流速が大きくなりレイノルズ数が 3000～4000 程度を超えると、乱流に移行して、ハーゲン-ポアゾイユの式で予想されるより流量は少なくなる。乱流域では流速は（ベルヌーイの式から予想されるように）圧力差の平方根に比例するようになる。またパイプ表面の粗さによって流速・流量が大きく変化するようになり、パイプを曲げたりしても流量は大きく変化する。こうした領域の挙動はファニング Fanning のまさつ係数 f を用いて整理されることが多い

$$f = (D/4L)\ [\Delta P/(\rho u^2/2)]$$

ファニングのまさつ係数は、管の表面（表面積πDL）で失われる運動エネルギーと圧力差によって与えられるエネルギー$(\pi D^2/4)\Delta P$ との比と考えられる。層流条件の成り立つ領域では、ファニングのまさつ係数は $16\eta/\rho uD = 16/Re$ になり、まさつの影響の小さい乱流条件の成り立つ領域では流体の粘度や速度によらず一定になる。

★充填層を通過する流れ

化学ではろ過やクロマトグラフィーなど、しばしば粉状の物体が詰まった層を流体が通過する問題を取り扱うことになる。こうした問題は種々の工学的、農学的な場面でも広く登場し、古くから検討されている。ダルシーDarcy は地下水の流れの研究から、厚さ L の充填層

---

* 気体の粘度は圧力に依存しないことが知られていて、圧力が低下するほど気体の動粘度は大きくなり、いっそう粘い流体として振る舞うようになる。

† 動水直径とも呼ぶ。流儀によって「水力半径」（あるいは「平均深さ」）として S/L（直径にすると $2S/L$）を用いる向きもあり、定義によく注意する。

に圧力差ΔPをかけた時の流速 u が、圧力勾配$\Delta P/L$ に比例し、流体の粘度ηに反比例するという関係を得た（1856 年）。

$u = k\,(\Delta P/\,\eta L)$

この透過係数 k と充填層に詰められた粉末の性状とのかかわりについて、先のハーゲン-ポアゾイユの式も手掛かりに種々の検討が行われ、次のコゼニー-カルマン Kozeny-Carman の式（Blake-Kozeny とも。ちなみにカルマンは航空力学で著名なカルマン Kármán とは別人）がよく知られている（ここでの係数 5 や 180 については、分野・流派によって異なる値が使用される）:

$$u = \frac{1}{5S_v^2}\frac{\varepsilon^3}{\eta(1-\varepsilon)^2}\frac{\Delta P}{L}$$
$$= \frac{d^2}{180}\frac{\varepsilon^3}{\eta(1-\varepsilon)^2}\frac{\Delta P}{L}$$

ここで S_vは空隙を除いた粉の体積当たりの表面積（球であれば$\pi d^2/(\pi d^3/6) = 6/d$）、$d$ は粉の粒径、εは粉の空隙率で、たとえば粉を水に浸した時の吸水率から評価することができる。空気の透過係数を測定し、コゼニー-カルマンの式に基づいて、次式から粉の表面積を評価することも行われる：

$$S_v = \sqrt{\frac{\varepsilon^3}{5(1-\varepsilon)^2}\frac{\Delta P}{\eta u L}}$$

この手法でおおむね数十 m^2/g 程度までの粉については、気体の吸着量の測定などによる手法とほぼ対応する表面積が得られることが知られている。セメントの粉については、標準試料と比較することで表面積を決定することが規格化されている（JIS R5201 セメントの物理試験方法)。

コゼニー-カルマンの式から、同じ流速を得るのに必要な圧力が粒径の２乗に比例して大きくなることが分かる。カラムクロマトグラフィーでは一般に充填粒子の粒径に比例して分離の効率は高くなるが、所要時間はそれにも増して増加するので、使用するシリカやアルミナの粒径には十分な注意が必要である。また空隙率が小さくなると透過係数が大幅に小さくなる。たとえば水酸化鉄などのかさばった沈殿をろ過する際、吸引ろ過をすると沈殿がろ紙の表面付近で圧縮されて空隙率が減少し、重力式のろ過よりかえって効率が悪くなることがある。

★粒子の沈降

流体中で速度 u で運動する直径 d の球に働くまさつ力 f については、レイノルズ数 $Re = ud/\nu$が 10 程度までの層流領域ではストークスの法則に従うことが知られている

$f = 3\pi\eta du$

液体中で粒子が沈降する際、最終的に重力とまさつ力が釣り合った速度（終端速度）で等速運動するようになる。流体の密度をρ、球の密度をρ_X、重力加速度を g とすると、比較的小さい粒子について終端速度は次式で与えられる。

$$u = \frac{(\rho_X - \rho)g}{18\eta}\,d^2$$

水溶液中で密度 2 g cm^{-3} 程度の沈殿が生成したとすると、沈殿の粒径が 10 μm 程度であれば終端速度は 0.05 mm/s になり、通常の実験室スケールでは数分で沈殿することになる。これが粒径 1 μm 程度（通常のろ紙ではすり抜けてしまう）になると半日程度かかることになる。この沈降速度の違いを利用して、粉末の粒径サイズの分布を調べることも行われる。

沈降する粒子の密度が高くなると、それぞれの粒子間の相互作用が重要になってくる。一般に沈降粒子の密度が増すと、粒子の間に引力的な相互作用が働き、一団となって沈降するようになる。こうした効果の現れとして、例えば試験管を傾けると沈降速度が増すことが知られおり（最初血沈で注目された。ボイコット効果と呼ぶ)、沈殿を採取するには三角フラスコが有利といえる。

★レオロジー

生クリームのようにニュートンの法則に従わないものも多く（非ニュートン液体)、化学の実験でもしばしば出会う。そうした流体を取り扱う学問分野としてレオロジーがある。

液体に速度勾配（せん断速度）を与えた時のまさつ力（せん断応力）の典型的な挙動を図に示す。水やトルエンなどの場合は速度勾配に比例してまさつ力が変化する。しかしたとえば歯磨きのペーストやクリームなどでは速度勾配が 0 でも抵抗力が存在し、ある程度の力を加えて始めて流れ始める（ビンガム Bingham 塑性流体)。またよく似た挙動だがペイント液などでは速度勾配を大きくするにつれまさつが減る（擬塑性流体・擬粘性流体)。これとは逆に、水に溶いた片栗粉のように、速度勾配を加えるとかえって抵抗を増す場合もある（ダイラタンシーdilatancy)。

あるいはもっと動的な現象だが、泥んこ遊び時の泥のように、振り混ぜると抵抗力が減る場合もある（チキソトロピーthixotropy)。

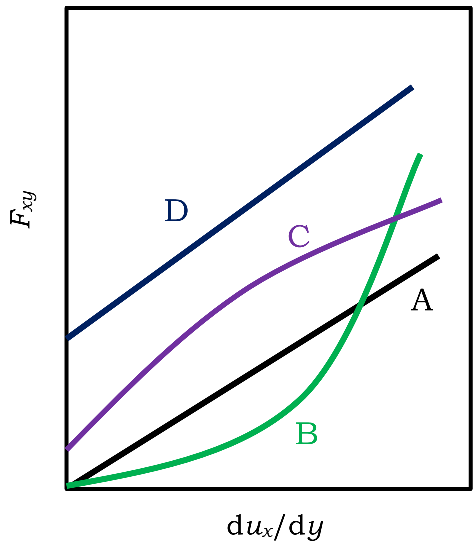

図　典型的な流動曲線
A: ニュートン液体
B: ダイラタンシー
C: 擬塑性流体
D: ビンガム塑性流体

問題

学生番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

☆水中を密度が 2 g cm^{-3} 程度の直径 d の球が沈降する時、粒径が大きいと終端速度に対するストークスの法則が成り立たなくなる。直径がどの程度になるとストークスの法則が成り立たなくなるか？またそれ以上の大きさの球の終端速度はストークスの法則から予想されるより大きいか小さいか？